式の乗法・除法

2 年までに式の加減や，単項式の乗除を学習してきました。３年生では多項式の乗除を学習します。最初に多項式と単項式の学習を行っていきましょう。

多項式と単項式の乗除

このような式は，分配法則を利用して計算することができます。

$$(a+b)c = ac + bc \cdot\cdot\cdot ①$$
$$a(b+c) = ab + ac \cdot\cdot\cdot ②$$

また，多項式÷単項式の計算も，多項式÷数の場合と同じように計算することができます。

多項式の乗法 $(a+b)(c+d)$ の計算の仕方

①式を利用するために，$c+d$ をＡと置き換えします。すると，

$(a+b)(c+d) = (a+b)A$ となります。これで①の分配法則が使える形となりました。

$= aA + bA$

$= a(c+d) + b(c+d)$・・・A→$c+d$ と置き換えした文字を元に戻しました。

$= ac + ad + bc + bd$・・・分配法則②をそれぞれ用いて計算しました。

よって，$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$となることがわかりました。

また，図形的にもかんがえることができます。図のように縦の長さが$a+b$，横の長さが $c+d$ の長方形の面積を考えると 4 つの区画Ⅰ～Ⅳの和と考えることができます。面積の総和は$ac+ad+bc+bd$であるので$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ であることがわかります。

a	Ⅰ ac	Ⅱ ad
b	Ⅲ bc	Ⅳ bd
	c	d

まとめ

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

また，２項×3 項や 3 項×3 項も同様に 1 つ 1 つの項の掛け算で求めることができます。

$$(a+b)(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be$$

$$(a+b+c)(d+e+f)=ad+ae+af+bd+be+bf+cd+ce+cf$$

多項式の乗法では，特に以下のものをとりあげる。

乗法公式

1　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

2　$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

3　$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

4　$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

1～4 までは多項式の乗法を使って，次のようにして求めることができます。

1　$(x+a)(x+b)=x^2+bx+ax+ab=x^2+(a+b)x+ab$

2　$(x+a)^2=(x+a)(x+a)=x^2+ax+ax+a^2=x^2+2ax+a^2$

3　$(x-a)^2=(x-a)(x-a)=x^2-ax-ax+a^2=x^2-2ax+a^2$

4　$(x+a)(x-a)=x^2-ax+ax-a^2=x^2-a^2$

いろいろな乗法計算

例　$(2x+3)(2x+5)$ を展開しなさい。

（解法 1）乗法公式 1 を用いる場合	（解法 2）多項式の乗法を用いる場合
$2x=A$ とおくと，	$(2x+3)(2x+5)$
$(A+3)(A+5)=A^2+(3+5)A+3\times5$	$=2x\times2x+2x\times5+3\times2x+3\times5$
$=A^2+8A+15$	$=4x^2+10x+6x+15$
$=(2\mathrm{x})^2+8\times2\mathrm{x}+15$	$=4x^2+16x+15$
$=4x^2+16x+15$	

この例題の場合，無理に公式を使おうとして置きかえを利用してもあまり計算が楽になっていません。ですが，問題が複雑になったり，この後学習する因数分解では公式を利用すると便利になることが多いので，今のうちに公式を使いことなせるようにしていきましょう。

因数分解について

1 つの多項式を，２つ以上の単項式や多項式の積で表すことを**因数分解**といいます。
因数分解したときに，その積をつくっている一つひとつの式を，もとの多項式の因数といいます。

例　$x^2+x=x\times x+1\times x=x(x+1)$・・・積の形！
このとき x と $x+1$ はどちらも x^2+x の因数であるといいます。

因数分解は今まで習ってきた展開の逆操作だということができます。

因数分解を考える
例　$2x+4y$
$2x+4y$ という多項式には $2x$ という単項式と $4y$ という単項式の和で表されているが，このそれぞれの単項式は $2\times x$，$2\times 2\times y$ といったように 2 という共通な因数があります。
この共通な因数のことを**共通因数**といいます。

因数分解の公式
因数分解の公式は乗法公式のイコールの左右を入れ替えたものになります。

1　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
2　$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
3　$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
4　$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

因数分解の手順は以下のとおりである。
共通因数がある場合は共通因数をくくりだす。
部分的に同じ因数がある場合は，その因数を A でまとめる。
乗法公式を用います。

項が 4 つの因数分解の求め方
①　1・2 項目と 3・4 項目でそれぞれ共通因数でくくります。そのあと残った 2 項を共通因数をくくることによって求めることができます。
例　$ax+4a-x-4$ を因数分解しなさい。
$ax+4a$ は a が共通しているので，a でくくると，$a(x+4)$

$-x-4$ は -1 が共通しているので， -1 でくくると， $-(x+4)$
よって， $ax+4a-x-4=a(x+4)-(x+4)$
$x+4=A$ とおくと， $aA-A=A(a-1)$
A を $x+4$ に戻して， $ax+4a-x-4=(x+4)(a-1)$

② 2 項 2 項に分けてうまくいかないときには 1 項と 3 項に分けて考えます。分け方については， $-\mathrm{A}^2$とそれ以外に分けて， $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$を使えるように式変形していきます。

例 x^2-y^2-6x+9 を因数分解しなさい。
$-y^2$ が $-\mathrm{X}^2$ の形をしているので， x^2-6x+9 と $-y^2$ に分けます。
x^2-6x+9 は乗法公式 3 $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$ より，
$x^2-y^2-6x+9=(x-3)^2-y^2$
$x-3=A$ とおくと， $A^2-y^2=(A+y)(A-y)$
$=(x-3+y)(x-3-y)$
よって， $x^2-y^2-6x+9=(x-3+y)(x-3-y)$

2 や 5 のように， 1 とその数自身の積以外に 2 つの自然数の積に表せない自然数を素数といいます。
自然数 n をいくつかの自然数の積の形で表すとき， かけ合わされた 1 つ 1 つの数を， n の因数 といいます。
因数が素数であるとき， その因数を素因数といい， 自然数 n を素因数だけの積の形に表すことを， n を素因数分解するといいます。素因数分解は， どんな順番でも同じ結果になりますが， 素因数分解をしなさいといわれたら， 素数の大きさが小さい方から順に書いていきます。

例 56 を素因数分解しなさい。

$$56=2^3\times 7$$

最後に

展開や因数分解は無味乾燥な計算ばかりで正直面白くない単元だと感じる人も多いかと思います。しかし， これらは今後習う 2 次方程式や三平方の定理， さらに高校や大学でも式計算の途中で避けては通れないほど重要な単元である。ここでつまずくと他の単元に多大な影響を与えるのでしっかり身につけるようにしていきましょう。